

MAI 1 – příklady pro 7. a 8. cvičení

Derivace funkce a užití derivace.

1. Výpočet limit funkcí užitím l' Hospitalova pravidla:

Vypočítejte limity:

a) limity „ $\frac{0}{0}$ “ nebo „ $\frac{\infty}{\infty}$ “ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln 3x}{\sqrt{x}}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+x^2)}{\ln(2+3x^3)}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{\sin x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(\sin 2x)}{\ln(\sin x)};$$
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2} - 1}{\sin x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3};$$

b) limity „ $0 \cdot \infty$ “ :

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x^2 \ln x; \quad \lim_{x \rightarrow 0+} x^a \ln x \quad (a > 0); \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 - \frac{2}{x}\right); \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \arcsin \frac{1}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x$$
$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 + 1) \cdot (\log(n^2 - 4) - 2 \log n);$$

c) limity „ $\infty - \infty$ “ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{3x} - \frac{1}{\sin x} \right); \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x);$$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^{\frac{1}{\ln x}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0+} (\cos \sqrt{x})^{\frac{2}{x}}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^x; \quad \lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 2x)^{\frac{1}{2x}}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^{x^2};$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

2. Dopolčítávání derivací ve „špatných“ bodech:

a) Spočítejte derivaci $f'(1)$, případně jednostranné derivace $f'_+(1)$ nebo $f'_-(1)$ funkce

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right).$$

b) Ukažte, že f je spojitá v R a dále zjistěte, pro která $x \in R$ existuje derivace, případně jednostranné derivace $f'_+(x)$ nebo $f'_-(x)$ (a tyto derivace spočítejte), když:

i) Funkce f je definována: $f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x}$, pokud $x \neq 0$ a $f(0) = 0$.

ii) Funkce f je definována: $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2}$, pokud $x \neq 0$ a $f(0) = \frac{\pi}{2}$.

iii) Je dána funkce f předpisem: $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$ pro $x \neq 0$, $f(0) = \frac{1}{2}$.

c) Je dána funkce
$$f(x) = \cos \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x}} .$$

Najděte definiční obor funkce f . Vyšetřete spojitost funkce f v D_f . Dále zjistěte, pro která $x \in D_f$ existuje derivace $f'(x)$, případně jednostranné derivace $f'_+(x)$ nebo $f'_-(x)$. Tyto derivace spočítejte.

3. Vyšetřování extrémů funkce (globálních i lokálních) a průběhu funkce:

a) vyšetřete lokální a globální extrémy funkce

i) $f(x) = \frac{e^{|x|}}{x-1}$; ii) $f(x) = \exp(-\sqrt{|x^2 - 1|})$;

b) vyšetřete průběh funkce ($\exp(x) = e^x$):

$$f(x) := \frac{x}{x^2-1}; \frac{|x|}{x^2-1}; \left| \frac{x}{x^2-1} \right|; \frac{x^3}{x^2-1}; \frac{1}{x} + 4x^2; \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^2;$$

$$f(x) := x^2 e^{-x}; x e^{-x^2}; \frac{e^{-x}}{2-x}; e^{\frac{1}{x}}; e^{\frac{1}{x}} - x; (x-2) \cdot e^{-\frac{1}{x}} \text{ nebo } |x-2| \cdot e^{-\frac{1}{x}};$$

$$\exp\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right); |x|e^{-|x-1|};$$

$$f(x) := x + \sin x; x - 2 \arctg x; \arctg\left(\frac{x-1}{x+1}\right); \arctg \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}; \arcsin \frac{2x}{1+x^2};$$

$$f(x) := x \ln x; x - \ln(x+1); \frac{x}{\ln x}.$$

4. Několik „slovních“ příkladů na vyšetřování extrémů funkcí:

(můžete zkusit, pokud nebudete mít nic jiného na práci a bude se vám chtít toto řešit)

1. Na grafu funkce $y = x^2$ najděte bod, nejbližší bodu $A[6,3]$.
2. Najděte válec daného objemu s nejmenším povrchem.
3. Jaké čtverce v rozích čtvercového papíru máme vystříhnout, abychom složili krabičku (bez víka) maximálního objemu?
4. Do koule daného poloměru R vepište válec maximálního objemu (nebo s maximálním povrchem).
5. Jaký maximální objem může mít kužel, je-li dána jeho strana?
6. Do daného kuželu vepište válec (tak, že základna válce je část základny kuželu) maximálního objemu.